

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**
**«КАРАЧАЕВО-ЧЕРКЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ У.Д. АЛИЕВА»**

Физико-математический факультет



СОВРЕМЕННАЯ АЛГЕБРА

Методические рекомендации по изучению дисциплины,
решению задач, задачи для самостоятельного решения

Карачаевск, 2023

Рекомендовано учебно-методической комиссией физико-математического факультета
КЧГУ имени У.Д. Алиева

Кубекова Б.С. **Современная алгебра.** Методические указания по изучению дисциплины и задания для выполнения контрольной работы студентами заочного отделения.- Карачаевск, 2023.

Рецензент: *Гербеков Х.А.* канд. пед .наук, доцент

Пособие содержит общие методические указания и методические указания к выполнению заданий контрольной работы, предусмотренной при изучении данной дисциплины.

© Карачаево-Черкесский государственный университет, 2023

1. Общие методические рекомендации

При самостоятельном изучении дисциплины вначале нужно ознакомиться с ее программой. Изучить материал, изложенный в рекомендуемой литературе. При этом следует составить краткий конспект из основных положений, разобрать примеры, приведенные в учебниках.

Если при самостоятельном изучении возникнут трудности, обратиться за консультацией к преподавателю.

После усвоения учебного материала выполняется контрольная работа.

2. Программа курса «Современная алгебра»

1. Матрицы.

Матрицы. Действия над матрицами. Определители второго и третьего порядков и их свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам какого - либо ряда. Понятие об определителях n -го порядка. Ранг матрицы. Собственные значения матриц. Обратная матрица. Матричная запись системы линейных уравнений и ее решение.

Вопросы для самоконтроля.

1. Дать определение матрицы. Виды матриц.
2. Элементарные преобразования матриц.
3. Действия над матрицами: сложение и вычитание, умножение матрицы на число, произведение двух матриц, возведение матрицы в степень, транспонирование матрицы.
4. Дать определение определителя и написать основные свойства определителей.
5. Дать определения минора и алгебраического дополнения матрицы.
6. Записать разложение определителя по элементам какого - либо ряда.
7. Обратная матрица.
8. Ранг матрицы.
9. Собственные значения матриц.

2. Системы линейных уравнений.

Основные понятия и определения системы линейных уравнений. Системы n линейных уравнений с n переменными. Матричная запись системы линейных уравнений. Методы решения систем линейных уравнений: метод Крамера, метод обратной матрицы, метод Гаусса. Системы m линейных уравнений с n переменными. Система линейных однородных уравнений.

Вопросы для самоконтроля.

1. Дать определение системы линейных уравнений.
2. Что называется решением системы линейных уравнений.
3. Написать формулы Крамера для решения систем линейных уравнений.
4. Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений.
5. Метод обратной матрицы для решения систем линейных уравнений.
6. Системы m линейных уравнений с n переменными. теорема Кронекера – Капели.
7. Дать определение однородной системы линейных уравнений.
8. Необходимое и достаточное условие того, что система однородных уравнений имеет ненулевое решение.

3. Элементы матричного анализа.

Векторы на плоскости и в пространстве. n -мерный вектор и векторное пространство. Размерность и базис векторного пространства. Переход к новому базису. Евклидово пространство. Линейные операторы. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Квадратичные формы.

Вопросы для самоконтроля.

1. Определение вектора на плоскости и в пространстве.
2. Координаты вектора.
3. Дать определение коллинеарных и равных векторов.
4. Линейные операции над векторами: сложение и вычитание двух векторов, умножение вектора на скаляр.
5. Скалярное произведение двух векторов.

6. Угол между векторами. Условие коллинеарности и перпендикулярности двух векторов.
7. Дать определение n -мерного вектора. Линейные операции над n -мерными векторами.
8. Дать определение векторного пространства.
9. Дать определение линейно независимых векторов.
10. Дать определение n -мерного векторного пространства.
11. Дать определение базиса n -мерного векторного пространства.
12. Теорема о представлении вектора через базис.
13. Переход к новому базису.
14. Дать определение линейного оператора.
15. Действия над линейными операторами.
16. Дать определение собственного вектора и собственного значения линейного оператора.
17. Дать определение квадратичной формы.

4. Элементы аналитической геометрии.

Системы координат на прямой, плоскости и в пространстве. Основные задачи на метод координат (расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении).

Уравнение линии на плоскости. Уравнение прямой. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых. системы линейных неравенств.

Уравнение прямой и плоскости в пространстве.

Вопросы для самоконтроля.

1. Дать определение системы координат на прямой, плоскости и в пространстве.
2. Записать формулу расстояния между двумя точками.
3. Записать формулы для нахождения координат середины отрезка.
4. Дать определение уравнения линии на плоскости.
5. Записать различные виды уравнения прямой на плоскости: уравнение с угловым коэффициентом; уравнение прямой, проходящей через две точки; уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении; уравнение прямой в отрезках; общее уравнение прямой. Пояснить смысл коэффициентов.
6. Записать условие параллельности прямых.
7. Записать условие перпендикулярности прямых.
8. Записать формулу расстояния от точки до прямой.
9. Система линейных неравенств на плоскости.
10. Записать и пояснить уравнение плоскости.
11. Уравнение прямой в пространстве.
12. Взаимное расположение прямых в пространстве.
13. Расстояние между прямыми в пространстве.
14. Взаимное расположение плоскостей в пространстве.
15. Расстояние между плоскостями.
16. Расстояние от точки до плоскости.

5. Основы оптимального программирования.

Линейные задачи оптимизации. Основные определения и задачи линейного программирования. Симплексный метод решения задач линейного программирования. Целочисленное программирование.

1. Общая постановка задачи линейного программирования (ЛП).
2. Дать определение допустимого решения задачи ЛП и области допустимых решений (ОДР).
3. Виды математических моделей.
4. Алгоритм графического метода решения задач ЛП.
5. Алгоритм симплексного метода.
6. Общая формулировка задачи целочисленного программирования.
7. Метод Гомори.

3. Задания к контрольной работе.

Контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку в соответствии с вариантом, выбираемым по последней цифре номера зачетной книжки. При этом, если предпоследняя цифра учебного шифра нечетная (1, 3, 5, 7, 9), то номера заданий для соответствующего варианта даны в таблице 1. Если предпоследняя цифра четная или нуль (2, 4, 6, 8, 0), то номера задач даны в таблице 2. Каждая задача должна содержать условие, подробное решение и ответ.

Таблица 1

№ варианта	Номер задачи контрольной работы				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
1	1	21	41	61	81
2	2	22	42	62	82
3	3	23	43	63	83
4	4	24	44	64	84
5	5	25	45	65	85
6	6	26	46	66	86
7	7	27	47	67	87
8	8	28	48	68	88
9	9	29	49	69	89
10	10	30	50	70	90

Таблица 2

№ варианта	Номер задачи контрольной работы				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
1	11	31	51	71	91
2	12	32	52	72	92
3	13	33	53	73	93
4	14	34	54	74	94
5	15	35	55	75	95
6	16	36	56	76	96
7	17	37	57	77	97
8	18	38	58	78	98
9	19	39	59	79	99
10	20	40	60	80	100

Задача № 1.

Даны вершины треугольника ABC . Найти: 1) уравнение прямой AB ; 2) уравнение высоты CD и ее длину; 3) координаты векторов \overline{AB} и \overline{AC} ; 4) угол A треугольника ABC .

1. $A(-2; -3), B(0; 7), C(8; 3)$.
2. $A(1; 2), B(3; 12), C(11; 8)$.
3. $A(-4; -1), B(-2; 9), C(6; 5)$.
4. $A(4; 1), B(6; 11), C(14; 7)$.
5. $A(-3; -2), B(-1; -8), C(7; 4)$.
6. $A(2; 5), B(2; 13), C(10; 9)$.
7. $A(3; 0), B(5; 10), C(13; 6)$.
8. $A(0; 3), B(2; 13), C(10; 9)$.
9. $A(-1; 5), B(1; 15), C(9; 11)$.
10. $A(5; 4), B(7; 14), C(15; 10)$.
11. $A(-1; -2), B(1; 8), C(9; 4)$.
12. $A(-3; 0), B(-1; 10), C(7; 6)$.
13. $A(-2; -1), B(0; -7), C(8; 5)$.

14. $A(0; 6), B(2; 10), C(10; 12)$.
15. $A(4; 1), B(6; 11), C(14; 7)$.
16. $A(2; 3), B(4; 13), C(12; 9)$.
17. $A(5; 2), B(7; 12), C(15; 8)$.
18. $A(3; -4), B(6; 6), C(13; 2)$.
19. $A(1; 4), B(3; 14), C(11; 11)$.
20. $A(6; 5), B(8; 15), C(16; 11)$.

Задача № 2.

Написать разложение вектора \bar{x} по векторам $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ или доказать, что это невозможно.

21. $\bar{x} = (7; 0; 7), \bar{p} = (2; 1; 3), \bar{q} = (3; -2; 1), \bar{r} = (1; -3; -4)$.
22. $\bar{x} = (3; 0; 1), \bar{p} = (5; 3; 1), \bar{q} = (-2; 1; 4), \bar{r} = (-2; -1; 2)$.
23. $\bar{x} = (-2; 4; 7), \bar{p} = (0; 1; 2), \bar{q} = (1; 0; 1), \bar{r} = (-1; 2; 4)$.
24. $\bar{x} = (6; 12; -1), \bar{p} = (1; 3; 0), \bar{q} = (2; -1; 2), \bar{r} = (0; -1; 2)$.
25. $\bar{x} = (1; -4; 4), \bar{p} = (2; 1; -1), \bar{q} = (0; 3; 2), \bar{r} = (1; -1; 1)$.
26. $\bar{x} = (-9; 5; 5), \bar{p} = (4; 1; 1), \bar{q} = (2; 0; -3), \bar{r} = (-1; 2; 1)$.
27. $\bar{x} = (-5; -5; 5), \bar{p} = (-2; 0; 1), \bar{q} = (1; 3; -1), \bar{r} = (0; 4; 1)$.
28. $\bar{x} = (13; 2; 7), \bar{p} = (5; 1; 0), \bar{q} = (2; -1; 3), \bar{r} = (1; 0; -1)$.
29. $\bar{x} = (-19; -1; 7), \bar{p} = (0; 1; 1), \bar{q} = (-2; 0; 1), \bar{r} = (3; 1; 0)$.
30. $\bar{x} = (3; -3; 4), \bar{p} = (1; 0; 2), \bar{q} = (0; 1; 1), \bar{r} = (2; -1; 4)$.
31. $\bar{x} = (3; 3; -1), \bar{p} = (3; 1; 0), \bar{q} = (-1; 2; 1), \bar{r} = (-1; 0; 2)$.
32. $\bar{x} = (6; 5; 14), \bar{p} = (1; 1; 4), \bar{q} = (0; -3; 2), \bar{r} = (2; 1; -1)$.
33. $\bar{x} = (3; 0; 1), \bar{p} = (3; 1; 6), \bar{q} = (-2; 2; -3), \bar{r} = (-4; 5; -1)$.
34. $\bar{x} = (-7; 3; -1), \bar{p} = (1; 3; 5), \bar{q} = (4; -2; 4), \bar{r} = (-2; -1; -1)$.
35. $\bar{x} = (-5; 9; 13), \bar{p} = (0; 1; -2), \bar{q} = (3; -1; 1), \bar{r} = (4; 1; 0)$.
36. $\bar{x} = (-1; 7; -4), \bar{p} = (-1; 2; 1), \bar{q} = (2; 0; 3), \bar{r} = (1; 1; -1)$.
37. $\bar{x} = (3; 1; 8), \bar{p} = (0; 1; 3), \bar{q} = (1; 2; -1), \bar{r} = (2; 0; -1)$.
38. $\bar{x} = (3; 0; 1), \bar{p} = (1; 2; 5), \bar{q} = (2; -3; 4), \bar{r} = (1; -1; -2)$.
39. $\bar{x} = (-3; 5; 4), \bar{p} = (5; 1; 2), \bar{q} = (3; 4; -1), \bar{r} = (-4; 2; 1)$.
40. $\bar{x} = (4; -1; -3), \bar{p} = (2; 1; 5), \bar{q} = (-4; 3; 5), \bar{r} = (1; -1; -4)$.

Задача № 3.

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{41.} \begin{cases} x - 3y - z = 1 \\ 2x + y + z = -7 \\ 2x - y - 3z = 5 \end{cases} \\
 \mathbf{42.} \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 3 \\ 2x + y - z = -5 \\ 5x - y + 3z = 4 \end{cases} \\
 \mathbf{43.} \begin{cases} 3x + y + 2z = -4 \\ x - 2y - z = -1 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \\
 \mathbf{44.} \begin{cases} x + 5y - z = -1 \\ 2x + y - 2z = 7 \\ x - 4y + z = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

$$45. \begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x+2y+3z=0 \\ x-y-2z=6 \end{cases}$$

$$46. \begin{cases} 2x-3y+3z=0 \\ x+y-2z=-7 \\ x-2y+3z=3 \end{cases}$$

$$47. \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y-6z=2 \\ 4x+y-3z=3 \end{cases}$$

$$48. \begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x+2y+z=8 \\ 4x-3y-2z=-1 \end{cases}$$

$$49. \begin{cases} x-4y-2z=-3 \\ 3x+y+z=5 \\ 3x-5y-6z=-7 \end{cases}$$

$$50. \begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x+y+3z=-5 \\ 3x+4y+z=-2 \end{cases}$$

$$51. \begin{cases} 7x-5y=31 \\ 4x+11z=-5 \\ 2x+3y+4z=4 \end{cases}$$

$$52. \begin{cases} 2x-y+3z=-3 \\ x+2y+z=2 \\ x-3y+4z=-1 \end{cases}$$

$$53. \begin{cases} x+2y+4z=31 \\ 5x+y-2z=20 \\ 3x-y+z=10 \end{cases}$$

$$54. \begin{cases} 3x+y+2z=-4 \\ x-2y-z=-1 \\ 2x+3y+2z=0 \end{cases}$$

$$55. \begin{cases} 2x-3y-5z=1 \\ 3x+y-2z=-4 \\ x-2y+z=5 \end{cases}$$

$$56. \begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$$

$$57. \begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x+2y+3z=0 \\ x-y-2z=6 \end{cases}$$

$$58. \begin{cases} 4x-3y+2z=9 \\ 2x+5y-3z=0 \\ 5x+6y-2z=18 \end{cases}$$

$$59. \begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x-y+3z=-4 \\ 3x+5y+z=4 \end{cases}$$

$$60. \begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$$

Задача № 4.

Найти собственные значения и собственные векторы матриц.

$$61. \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad 62. \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad 63. \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad 64. \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$65. \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}, \quad 66. \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad 67. \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad 68. \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$69. \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad 70. \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad 71. \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad 72. \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$73. \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad 74. \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad 75. \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}, \quad 76. \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$77. \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad 78. \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad 79. \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad 80. \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Задача № 5.

Для приобретения оборудования для сортировки зерна фермер выделяет A ден.ед. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей B кв. м. Фермер может заказать оборудование двух видов: менее мощные машины типа $M1$ стоимостью C ден.ед., требующие произ-

водственную площадь D кв. м и обеспечивающие производительность за смену $2t$ зерна, и более мощные машины типа B стоимостью E ден.ед, требующие производственную площадь F кв.м и обеспечивающие производительность $3t$ сортового зерна за смену.

Требуется составить оптимальный план приобретения оборудования, обеспечивающий максимальную общую производительность при условии, что фермер может приобрести не более G машин типа $M2$.

Составить математическую модель задачи и ее решить методом Гомори. Данные для решения задачи формируются по таблице 3.

Таблица 3. Значения коэффициентов.

№	A	B	C	D	E	F	G
81	25	50	1	3	3	5	6
82	26	51	2	4	4	6	7
83	27	52	3	5	5	7	8
84	28	53	4	3	6	5	9
85	29	54	1	4	3	6	6
86	30	55	2	5	4	7	7
87	31	56	3	3	5	5	8
88	32	57	4	4	6	6	9
89	33	58	1	5	3	7	6
90	34	59	2	3	4	5	7
91	35	60	3	4	5	6	8
92	36	61	4	5	6	7	9
93	37	62	1	3	3	5	6
94	38	63	2	4	4	6	7
95	39	64	3	5	5	7	8
96	40	65	4	3	6	5	9
97	41	66	1	4	3	6	6
98	42	67	2	5	4	7	7
99	43	68	3	3	5	5	8
100	44	69	4	4	6	6	9

4. Методические указания по выполнению контрольной работы

Методические указания к задаче № 1

Расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ находится по формуле

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (1)$$

Например, расстояние между точками $A(2; -1)$ и $B(5; 3)$ равно

$$AB = \sqrt{(2-5)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Координаты точки $M(x_0; y_0)$ – середины отрезка АВ равны полусуммам одноименных координат, т.е., если $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \quad (2)$$

Например, точка М – середина отрезка АВ, если $A(2; -1)$ и $B(5; 3)$, имеет координаты:

$$x_0 = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2} = 3,5, \quad y_0 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1, \quad M(3,5; 1).$$

Общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$ (3)

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (4)$$

Например, уравнение прямой, проходящей через точки $A(2; -1)$ и $B(5; 3)$, запишется:

$$\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-(-1)}{3-(-1)}; \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4}; \quad 4x-8 = 3y+3; \quad 4x-3y-11 = 0.$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = kx + b$ (5),

где $k = \operatorname{tg} \varphi$, φ – угол наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс.

Уравнение с угловым коэффициентом (4) получается из общего уравнения (3), если из него выразить y :

$$Ax + By + C = 0; \quad By = -Ax - C; \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}; \quad k = -\frac{A}{B}; \quad b = -\frac{C}{B}$$

Например, полученное выше общее уравнение прямой АВ: $4x - 3y - 11 = 0$, запишется

$$\text{уравнением с угловым коэффициентом: } -3y = -4x + 11; \quad y = \frac{4}{3}x - \frac{11}{3}.$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_0; y_0)$ в данном направлении:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (6)$$

Точка пересечения двух прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ находится как решение системы двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Угол α между двумя прямыми определяется через угловые коэффициенты этих прямых по формуле:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|, \quad (7)$$

где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты данных прямых.

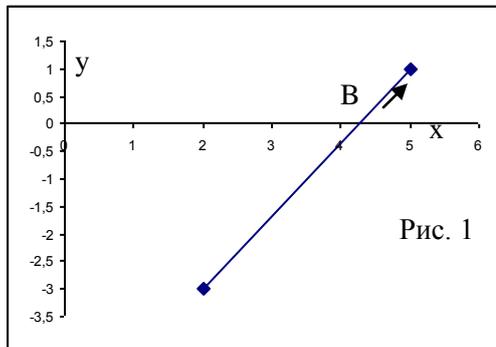
Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$, перпендикулярны, если $1 + k_1 k_2 = 0$, т.е. $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

(8)

Вектор – это направленный отрезок (рис.1), т.е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление. Если A – начало вектора, а B – его конец, то вектор обозначается \overline{AB} .

Чтобы найти координаты вектора, надо из координат его конца вычесть координаты его начала. Т.е., если $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ (9)

Например, если $A(2; -3)$ и $B(5; 1)$, то $\overline{AB} = (5 - 2; 1 - (-3)) = (3; 4)$.



Длиной вектора \overline{AB} называется длина отрезка AB и обозначается $|\overline{AB}|$. Длину вектора \overline{AB} вычисляют по формуле:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (10)$$

Например, длина вектора $\overline{AB} = (3; 4)$ равна $|\overline{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Скалярным произведением вектора $\vec{a} = (x_1; y_1)$ и вектора $\vec{b} = (x_2; y_2)$ называется число, равное:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \quad (11)$$

Например, скалярное произведение векторов $\vec{a} = (4; -3)$ и $\vec{b} = (-5; -12)$ равно:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot (-5) + (-3) \cdot (-12) = -20 + 36 = 16.$$

Угол между векторами $\vec{a} = (x_1; y_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2)$ задается формулой: $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

(12)

Например, найдем угол между векторами $\vec{a} = (-4; -3)$ и $\vec{b} = (-2; -1)$. Для этого найдем сначала длину каждого вектора:

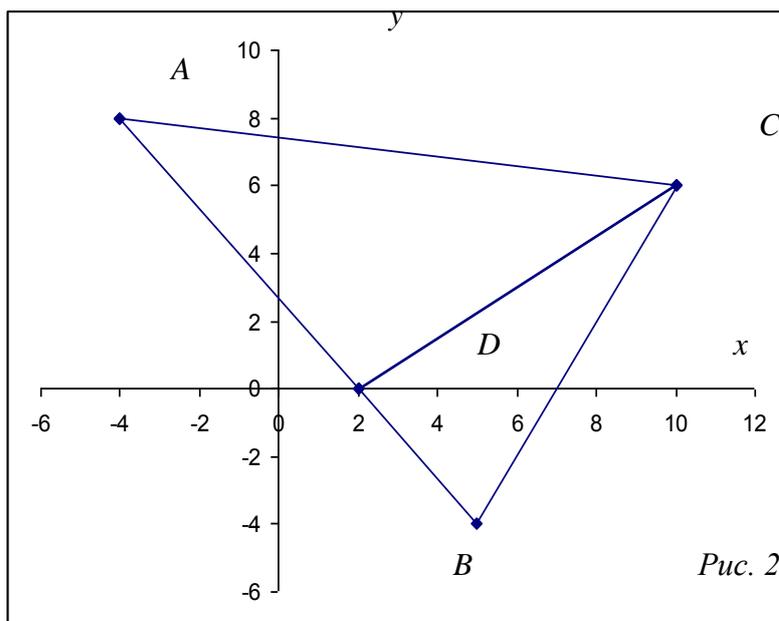
$$|\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5; \quad |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

Затем найдем скалярное произведение этих векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-1) = 8 + 3 = 11$. Тогда

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{11}{5\sqrt{5}}; \quad \varphi = \arccos \frac{11}{5\sqrt{5}}.$$

Пример. Даны вершины треугольника ABC : $A(-4; 8)$, $B(5; -4)$, $C(10; 6)$. Найти: 1) уравнение прямой AB ; 2) уравнение высоты CD и ее длину; 3) координаты векторов \overline{AB} и \overline{AC} ; 4) угол A треугольника ABC .

Решение. Выполним чертеж к задаче (рис. 2)



1) Уравнение прямой AB запишем по формуле (4):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

т.к. $A(-4; 8)$, $B(5; -4)$, то примем $x_1 = -4$, $x_2 = 5$, $y_1 = 8$, $y_2 = -4$ и получим

$$\frac{x - (-4)}{5 - (-4)} = \frac{y - 8}{-4 - 8}, \quad \frac{x + 4}{9} = \frac{y - 8}{-12}, \quad -12x - 48 = 9y - 72,$$

$$-12x - 9y + 24 = 0, \quad 4x + 3y - 8 = 0.$$

Выразим y : $3y = -4x + 8$, $y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$, $k_{AB} = -\frac{4}{3}$.

2) Составим уравнение высоты CD . Т.к. $CD \perp AB$, то ее угловой коэффициент:

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Уравнение CD запишем по формуле (6): $y - y_0 = k(x - x_0)$, т.к. она проходит через точку

$C(10; 6)$ в направлении, заданном угловым коэффициентом $k = \frac{3}{4}$. Получим:

$$y - 6 = \frac{3}{4}(x - 10), \quad 4y - 24 = 3x - 30, \quad 3x - 4y - 6 = 0.$$

Чтобы найти длину высоты CD , необходимо знать координаты точки D . Найдем их, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 8 = 0 & (\times 4) \\ 3x - 4y - 6 = 0 & (\times 3) \end{cases} + \begin{cases} 16x + 12y - 32 = 0 \\ 9x - 12y - 18 = 0 \end{cases} \begin{cases} 4x + 3y - 8 = 0 \\ 25x - 50 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 3y - 8 = 0 \\ x = 2 \end{cases} \begin{cases} 8 + 3y - 8 = 0 \\ x = 2 \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Координаты точки $D(2; 0)$. Длину высоты CD найдем как расстояние между точками C и D по

формуле (1): $CD = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(10 - 2)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} =$
 $\sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10.$

3) Координаты векторов \overline{AB} и \overline{AC} по формуле (9):

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1) = (5 - (-4); -4 - 8) = (9; -12),$$

$$\overline{AC} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1) = (10 - (-4); 6 - 8) = (14; -2).$$

4) Угол A треугольника ABC можно найти как угол между векторами \overline{AB} и \overline{AC} по формуле (12). Для этого найдем длины этих векторов (10) и их скалярные произведения (11):

$$|\overline{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9^2 + (-12)^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15,$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{14^2 + (-2)^2} = \sqrt{196 + 4} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2},$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 9 \cdot 14 + (-12) \cdot (-2) = 126 + 24 = 150.$$

$$\cos \varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \frac{150}{15 \cdot 10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ. 1) Уравнение стороны AB : $4x + 3y - 8 = 0$.

2) Уравнение высоты CD : $3x - 4y - 6 = 0$. Ее длина $CD = 10$.

3) $\overline{AB} = (9; -12)$, $\overline{AC} = (14; -2)$.

4) Угол между векторами \overline{AB} и \overline{AC} равен $\frac{\pi}{4}$.

Методические указания к задаче № 2.

Произведением матрицы A размерности $m \times k$ на матрицу B размерности $k \times n$ называется матрица C размерности $m \times n$, каждый элемент которой C_{ij} равен сумме произведений элементов i -той строки матрицы A на элементы j -того столбца матрицы B , т.е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ik}b_{kj}. \quad (13)$$

Например.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 10 & 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 5 \cdot 10 & 1 \cdot 4 + 5 \cdot 7 & 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 10 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 + 50 & 4 + 35 & 1 + 15 \\ -4 + 30 & 8 + 21 & 2 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & 39 & 16 \\ 26 & 29 & 11 \end{pmatrix}.$$

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, называемое определителем.

Определителем второго порядка, который соответствует матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix}$, называется

число, определяемое по формуле:

$$\Delta A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (14)$$

$$\text{Например, } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5.$$

Определителем третьего порядка, который соответствует матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

называется число, определяемое по формуле:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Например.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) =$$

$$= -12 + 4 + 1 - 8 - 3 + 2 = -16$$

Минором некоторого элемента определителя называется определитель, полученный из данного после вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. обозначается M_{ij} .

Например.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 1 = -5,$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} некоторого элемента определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (16)$$

Например.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 1 = -5,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3 - 1) = -2, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10.$$

Если матрица A – невырожденная (ее определитель отличен от нуля), то она имеет обратную матрицу A^{-1} , причем $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ (E – единичная матрица).

Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – невырожденная, тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Чтобы найти координаты вектора $\bar{b} = (b_1; b_2; b_3)$ в базисе $\bar{p} = (x_1; y_1; z_1)$, $\bar{q} = (x_2; y_2; z_2)$, $\bar{r} = (x_3; y_3; z_3)$ можно матрицу, обратную матрице, составленной из координат базисных векторов, умножить на матрицу-столбец координат данного вектора.

Обозначим новые координаты вектора $\bar{b} = (b_1^*; b_2^*; b_3^*)$, матрицу координат базисных векто-

ров $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ (векторы – столбцы), матрицу, обратную матрице A : A^{-1} .

$$\text{Тогда } \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Алгоритм решения.

1. Составить матрицу A , найти ее определитель, сделать вывод о существовании базиса: если $\Delta A \neq 0$ – базис существует, если $\Delta A = 0$ – не существует.

2. Найти матрицу A^{-1} , обратную матрице A .

3. Умножить матрицу A^{-1} на матрицу-столбец координат вектора в старом базисе.

Пример. Написать разложение вектора $\bar{x} = (4; -4; 5)$ по векторам $\bar{p} = (1; 1; 0)$, $\bar{q} = (1; -1; 1)$, $\bar{r} = (-3; 5; -6)$.

Решение.

$$1). \text{ Составим матрицу } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы A :

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 6 - 3 - 5 + 6 = 4 \neq 0, \text{ значит, векторы}$$

$\bar{p} = (1; 1; 0)$, $\bar{q} = (1; -1; 1)$, $\bar{r} = (-3; 5; -6)$ образуют базис.

2). Найдем матрицу, обратную матрице A . Для этого найдем сначала алгебраические дополнения элементов матрицы A по формулам (15) и (16):

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -(-6) = 6;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -(-6 + 3) = 3;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Пример. Решить методом Гаусса системы линейных уравнений.

$$a) \begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ x+y-z=0 \\ 4x-y+5z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 & \times(-3) & \times(-4) \\ 3x+2y+z=5 & \swarrow+ & \\ 4x-y+5z=3 & & \swarrow+ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ -y+4z=5 \\ -5y+9z=3 \end{cases} \times(-5) \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ -y+4z=5 \\ -11z=-22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$$

Проверка. $-3+6+2=5$ (верно), $-1+3-2=0$ (верно),
 $-4-3+10=3$ (верно).

Ответ. $x=-1$; $y=3$; $z=2$.

$$б) \begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20 \\ 3x_1-2x_2-5x_3=6 \end{cases}$$

Преобразования Гаусса проведем над расширенной матрицей.

Прямой ход.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 20 \\ 3 & -2 & -5 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times 2 \times 3 \\ \swarrow - \\ \swarrow - \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 4 & -14 & -12 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \times 2 \end{array} \leftarrow \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 18 & 32 \\ 0 & 4 & -14 & -12 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \times 4 \\ \swarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 18 & 32 \\ 0 & 0 & 58 & 116 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ :58 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 18 & 32 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Обратный ход. Перейдем к системе уравнений.

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6 \\ -x_2+18x_3=32 \\ x_3=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1-2x_2+6=6 \\ -x_2+36=32 \\ x_3=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=8 \\ x_2=4 \\ x_3=2 \end{cases}$$

Проверка. $8-8+6=6$ (верно), $16+12-8=20$ (верно),
 $24-8-10=6$ (верно).

Ответ. $x_1=8$; $x_2=4$; $x_3=2$.

Методические указания к задаче № 4.

Вектор $\bar{x} \neq 0$ называется *собственным вектором* матрицы A , если найдется такое число λ , что

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \quad (19)$$

Число λ называется *собственным значением* матрицы A , соответствующим вектору \bar{x} .

В равенстве (19) вектор \bar{x} представлен в виде матрицы-столбца. Это равенство выполняется тогда и только тогда, когда определитель матрицы $|A - \lambda E| = 0$. Поэтому, чтобы найти собственные значения и собственные векторы матрицы A , необходимо:

$$F(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min)$$

при ограничениях: $\sum a_{ij} x_j = b_i, \quad x_j \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$

Допустимым решением (планом) задачи линейного программирования называется вектор $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений.

Множество допустимых решений образует область допустимых значений (ОДР).

Допустимое решение, при котором целевая функция достигает своего экстремального значения, называется *оптимальным решением* задачи ЛП и обозначается \bar{X}_{opt} .

Базисное допустимое решение $\bar{X} = (x_1, x_2, x_r, 0, \dots, 0)$ является опорным решением, где r – ранг системы ограничений.

Если все ограничения системы заданы уравнениями и переменные x_j неотрицательные, то такая модель называется *канонической*.

Если хотя бы одно ограничение является неравенством, то модель задачи ЛП является *неканонической*. Чтобы перейти от неканонической модели к канонической, необходимо в каждое неравенство ввести балансовую переменную x_{n+i} . Если знак неравенства \leq , то балансовая переменная вводится со знаком плюс, если знак неравенства \geq , то – минус. В целевую функцию балансовые переменные не вводятся.

Чтобы составить математическую модель задачи ЛП, необходимо:

- 1) ввести обозначения переменных;
- 2) исходя из цели экономических исследований, составить целевую функцию;
- 3) учитывая ограничения в использовании экономических показателей задачи и их количественные закономерности, записать систему ограничений.

Симплексный метод является универсальным, т.к. позволяет решить практически любую задачу ЛП, записанную в каноническом виде.

Идея симплексного метода (метода последовательного улучшения плана) заключается в том, что, начиная с некоторого опорного решения осуществляется последовательно направленное перемещение по опорным решениям задачи к оптимальному. Значение целевой функции при этом перемещении для задач на максимум не убывает. Т.к. число опорных решений конечно, то через конечное число шагов получим оптимальное решение. *Опорным решением называется базисное неотрицательное решение.*

Алгоритм симплексного метода.

1. Математическая модель задачи должна быть канонической. Если она неканоническая, то ее надо привести к каноническому виду.

2. Находим исходное опорное решение и проверяем его на оптимальность. Для этого заполняем симплексную таблицу. Все строки таблицы 1-го шага, за исключением индексной строки, заполняются по данным системы ограничений и целевой функции.

Таблица 1.

c_i	БП	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_n	$F(x)$
		x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n	b_i
c_1	x_1	1	0	...	0	$h_{1,m+1}$...	$h_{1,n}$	b_1
c_2	x_2	0	1	...	0	$h_{2,m+1}$...	$h_{2,n}$	b_2
...
c_m	x_m	0	0	...	1	$h_{m,m+1}$...	$h_{m,n}$	b_m
	Δ_j	0	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_n	$F(\bar{X}_1)$

Индексная строка для переменных находится по формуле

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^m c_i h_{ij} - c_j, \quad j = \overline{1, n}$$

и по формуле $\Delta_F = \sum_{i=1}^m c_i b_i$ для свободного члена.

Возможны следующие случаи при решении задачи на максимум:

- Если все оценки $\Delta_j \geq 0$, то найденное решение оптимальное.

- Если хотя бы одна оценка $\Delta_j \leq 0$, но при соответствующей переменной нет ни одного положительного коэффициента, решение задачи прекращаем, т.к. $F(\bar{X}) \rightarrow \infty$, т.е. целевая функция неограниченна в ОДР.

- Если хотя бы одна оценка $\Delta_j \leq 0$, а при соответствующей переменной есть хотя бы один положительный коэффициент, то переходим к другому опорному решению.

- Если отрицательных оценок в индексной строке несколько, то в столбец БП вводят ту переменную, которой соответствует наибольшая по модулю отрицательная оценка.

Столбец, соответствующий наибольшей по модулю отрицательной оценке принимают за ключевой. За ключевую строку принимают ту, которой соответствует минимальное отношение свободных членов к положительным коэффициентам ключевого столбца. Элемент, стоящий на пересечении ключевого столбца и ключевой строки, называется ключевым элементом.

3. Заполняем симплексную таблицу 2-го шага:

- переписываем ключевую строку, разделив ее на ключевой элемент;
- заполняем базисные столбцы;
- находим остальные коэффициенты таблицы и оценки.

Если целевая функция требует нахождения минимального значения, то критерием оптимальности является неположительность оценок.

Пример. Для производства продукции двух типов предприятие использует два вида сырья. Данные об условиях приведены в таблице.

Сырье	Расход сырья на единицу продукции, кг/ед.		Количество сырья, кг
	1 тип	2 тип	
1 вида	1	3	300
2 вида	1	1	150
Прибыль, тыс.руб./ед. продукции	2	3	

Составить план производства по критерию «максимум прибыли».

Решение. Составим математическую модель данной задачи.

Обозначим: x_1 – единиц продукции 1 типа должно выпускать предприятие; x_2 – единиц продукции 2 типа должно выпускать предприятие.

Целевая функция строится на максимум прибыли: $f = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$.

$$\text{Ограничения по запасам сырья: } \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 300 \\ x_1 + x_2 \leq 150 \end{cases}$$

Неизвестные должны быть неотрицательны: $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$.

Модель неканоническая, приведем ее к каноническому виду, для этого в левую часть первого неравенства введем балансовую переменную x_3 , а второго неравенства – x_4 . Получим каноническую модель:

$$f = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 300 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 150 \end{cases} \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}$$

Составим симплексную таблицу первого шага.

c_i	БП	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_n	$F(x)$
		x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n	b_i
c_1	x_1	1	0	...	0	$h_{1,m+1}$...	$h_{1,n}$	b_1
c_2	x_2	0	1	...	0	$h_{2,m+1}$...	$h_{2,n}$	b_2
...
c_m	x_m	0	0	...	1	$h_{m,m+1}$...	$h_{m,n}$	b_m

Отрицательных оценок 2, большая по модулю соответствует 2 столбцу, значит 2-й столбец – ключевой. Найдем ключевую строку: $\min\left(\frac{300}{3}; \frac{150}{1}\right) = \min(100; 150) = 100 \Rightarrow 1 - \text{я строка}$

Таблица 1

c_i	БП	2	3	0	0	f
		x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
0	x_3	1	3	1	0	300
0	x_4	1	1	0	1	150
Δ_j		-2	-3	0	0	0

Ключевой элемент 3, соответствующий второму столбцу, т.е. – x_2 . Значит, чтобы построить таблицу 2-го шага необходимо из базисного столбца вывести x_3 , а ввести в него x_2 . При этом всю первую строку разделим на ключевой элемент, т.е на 3. И заполняем базисные столбцы.

c_i	БП	2	3	0	0	f
		x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
3	x_2	1/3	1	1/3	0	100
0	x_4		0		1	
Δ_j			0		0	

Найдем оставшиеся коэффициенты. Во втором столбце 1 таблицы стоит 1, а во второй таблице – 0. $0 = 1 - 1$, т.е. из второй строки 1 таблицы нужно вычесть первую строку 2 таблицы.

Оценки найдем по формулам: $\Delta_j = \sum_{i=1}^m c_i h_{ij} - c_j$, $j = \overline{1, n}$, $\Delta_F = \sum_{i=1}^m c_i b_i$.

c_i	БП	2	3	0	0	f
		x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
3	x_2	1/3	1	1/3	0	100
0	x_4	2/3	0	- 1/3	1	50
Δ_j		-1	0	1	0	300

Получили $F = 300$, т.е. план улучшился.

Отрицательная оценка одна, она соответствует 1 столбцу. Найдем ключевую строку:

$\min\left(\frac{100}{1/3}; \frac{50}{2/3}\right) = \min(300; 75) = 75 - 2 - \text{строка}$. Ключевой элемент 2/3.

Таблица 2

c_i	БП	2	3	0	0	f
		x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
3	x_3	1/3	1	1/3	0	100
0	x_4	2/3	0	- 1/3	1	50
Δ_j		-1	0	1	0	300

Строим таблицу 3 шага. Вместо x_4 в базисный столбец вводим x_1 . Вторую строку 2 таблицы делим на 2/3 и заполняем базисные столбцы.

c_i	БП	2	3	0	0	f
		x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
3	x_2	0	1			
2	x_1	1	0	- 1/2	3/2	75
Δ_j		0	0			

В первой строке 2 таблицы стоит $1/3$, а в третьей таблице 0 . $0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} : 2$.

Т.е. надо из элементов 1 строки 2 таблицы вычесть элементы 2 строки 2 таблицы, разделенные на 2.

Таблица 3.

		2	3	0	0	f
c_i	БП	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
3	x_2	0	1	1/2	- 1/2	75
2	x_1	1	0	- 1/2	3/2	75
Δ_i		0	0	1/2	3/2	375

В индексной строке все оценки неотрицательны, значит, получен оптимальный план.

Ответ. Предприятие должно выпустить 75 единиц продукции 1 типа и 75 единиц продукции 2 типа, получая при этом максимальную прибыль 375 тыс. р.

Некоторые задачи ЛП требуют целочисленного решения. К ним относятся задачи по производству и распределению неделимой продукции. В общем виде математическая модель задачи целочисленного программирования имеет вид:

$$F(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min)$$

при ограничениях: $\sum a_{ij} x_j = b_i, \quad x_j \geq 0 - \text{целое}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}$.

Для нахождения целочисленного решения используют несколько алгоритмов: метод ветвей и границ, метод отсечений, метод Гомори.. Мы рассмотрим метод, предложенный Гомори.

Он состоит в следующем. Симплексным методом находят оптимальное решение задачи. Если оно не целочисленное, то накладывается дополнительное ограничение по целочисленности и вычисления продолжают до получения нового решения. Если оно не целочисленное, то вновь накладывают ограничение по целочисленности и т.д. до получения целочисленного решения.

Целой частью числа a называется наибольшее целое число, не превосходящее a . Обозначается $[a]$. *Дробной частью* числа a называется разность между этим числом и его целой частью. Обозначается $\{a\} = a - [a]$.

Пример.

$$\left[\frac{4}{5} \right] = 0, \quad \left\{ \frac{4}{5} \right\} = \frac{4}{5} - 0 = \frac{4}{5},$$

$$\left[\frac{8}{5} \right] = 2, \quad \left\{ \frac{8}{5} \right\} = \frac{8}{5} - 2 = \frac{3}{5},$$

$$\left[-\frac{4}{5} \right] = -1, \quad \left\{ -\frac{4}{5} \right\} = -\frac{4}{5} - (-1) = -\frac{4}{5} + 1 = \frac{1}{5},$$

$$\left[-\frac{8}{5} \right] = -3, \quad \left\{ -\frac{8}{5} \right\} = -\frac{8}{5} + 3 = \frac{7}{5}.$$

Пример. Фирма выпускает три вида изделий А, Б, В. Все данные для одной смены приведены в таблице.

Ресурсы, ед.	Изделие А	Изделие Б	Изделие В	Объем ресурсов.
Оборудование	3	2	0	51
Сырье	1	4	0	48
Электроэнергия	3	3	1	67
Прибыль, у.е.	40	50	10	

Определить, сколько изделий каждого вида надо производить, чтобы получить максимальную прибыль.

Решение. Пусть x_1, x_2, x_3 – необходимо выпускать изделий А, Б, В соответственно.

Составим математическую модель задачи.

$$F(\bar{x}) = 40x_1 + 50x_2 + 10x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 51 \\ x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 67 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 - \text{целые}, \quad j = \overline{1,3}$$

Найдем симплексным методом оптимальное решение.

Таблица 1.

c _i	БП	40	50	10	0	0	0	f
		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	b _i
0	x ₄	3	2	0	1	0	0	51
0	x ₅	1	4	0	0	1	0	48
0	x ₆	3	3	1	0	0	1	67
Δ _j		-40	-50	-10	0	0	0	0
0	x ₄	2,5	0	0	1	-0,5	0	27
50	x ₂	0,25	1	0	0	0,25	0	12
0	x ₆	2,25	0	1	0	-0,75	1	31
Δ _j		-27,5	0	-10	0	12,5	0	600
40	x ₁	1	0	0	0,4	-0,2	0	10,8
50	x ₂	0	1	0	-0,1	0,3	0	9,3
0	x ₆	0	0	1	-0,9	-0,3	1	6,7
Δ _j		0	0	-10	11	7	0	897
40	x ₁	1	0	0	0,4	-0,2	0	10,8
50	x ₂	0	1	0	-0,1	0,3	0	9,3
10	x ₃	0	0	1	-0,9	-0,3	1	6,7
Δ _j		0	0	0	2	4	10	964

Отрицательных оценок нет. Получили оптимальное решение

$$X_{opt} = (10,8; 9,3; 6,7), \quad F(\bar{X}) = 964, \text{ но оно не является целочисленным.}$$

Найдем дробные части значений x_i :

$$[10,8] = \left[\frac{108}{10} \right] = 10, \quad \left\{ \frac{108}{10} \right\} = \frac{108}{10} - 10 = \frac{4}{5},$$

$$[9,3] = \left[\frac{93}{10} \right] = 9, \quad \left\{ \frac{93}{10} \right\} = \frac{93}{10} - 9 = \frac{3}{10},$$

$$[9,7] = 9, \quad \left\{ 9,7 \right\} = \frac{7}{10}.$$

Наибольшее значение $\frac{4}{5}$, что соответствует первой строке. Дробные части не целочисленных коэффициентов в этой строке:

$$[0,4] = 0, \quad \left\{ 0,4 \right\} = \frac{2}{5},$$

$$[-0,2] = -1, \quad \left\{ -0,2 \right\} = -0,2 + 1 = 0,8 = \frac{4}{5}.$$

Составим дополнительное ограничение по целочисленности:

$$\frac{2}{5}x_4 + \frac{4}{5}x_5 \geq \frac{4}{5} \text{ или } \frac{2}{5}x_4 + \frac{4}{5}x_5 - x_7 = \frac{4}{5}$$

и введем его в таблицу 2.

Таблица 2.

C _i	БП	40	50	10	0	0	0	0	f
		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	b _i
	x ₁	1	0	0	0,4	-0,2	0	0	10,8
	x ₂	0	1	0	-0,1	0,3	0	0	9,3
	x ₃	0	50	10	-0,9	-0,3	1	0	6,7
		0	0	0	0,4	0,8	0	-1	0,8
40	x ₁	1	0	0	0	-1	0	1	10
50	x ₂	0	1	0	0	0,5	0	-0,25	9,5
10	x ₃	0	0	1	0	1,5	1	-2,25	8,5
0	x ₄	0	0	0	1	2	0	-2,5	2
	Δ _j	0	0	0	0	0	10	5	960

Отрицательных оценок нет. Получили оптимальное решение $X_{opt} = (10; 9,5; 8,5)$, $F(\bar{X}) = 960$, но оно не является целочисленным.

Найдем дробные части значений x_i :

$$[9,5] = \left[\frac{95}{10} \right] = 9, \quad \left\{ \frac{95}{10} \right\} = \frac{95}{10} - 9 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2},$$

$$[8,5] = \left[\frac{85}{10} \right] = 8, \quad \left\{ \frac{85}{10} \right\} = \frac{85}{10} - 8 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2},$$

Дробные части одинаковы, что соответствует второй и третьей строкам. Дробные части не целочисленных коэффициентов во второй строке:

$$[0,5] = 0, \quad \{0,5\} = \frac{1}{2},$$

$$[-0,25] = -1, \quad \{-0,25\} = -0,25 + 1 = 0,75 = \frac{3}{4}.$$

Составим новое ограничение по целочисленности: $\frac{1}{2}x_5 + \frac{3}{4}x_7 \geq \frac{1}{2}$ или $\frac{1}{2}x_5 + \frac{3}{4}x_7 + x_8 = \frac{1}{2}$.

Введем его в симплексную таблицу 3.

Таблица 3.

C _i	БП	40	50	10	0	0	0	0	0	f
		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	b _i
	x ₁	1	0	0	0	-1	0	1	0	10
	x ₂	0	1	0	0	0,5	0	-0,25	0	9,5
	x ₃	0	0	1	0	1,5	1	-2,25	0	8,5
	x ₄	0	0	0	1	2	0	-2,5	0	2
	Δ _j	0	0	0	0	0,5	0,75	0	-1	0,5
40	x ₁	1	0	0	0	0	1,5	1	-2	11
50	x ₂	0	1	0	0	0	-0,75	-0,25	1	9
10	x ₃	0	0	1	0	0	-1,25	-2,25	3	7
0	x ₄	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	x ₅	0	0	0	0	1	1,5	0	-2	1
	Δ _j	0	0	0	0	0	10	5	0	960

Отрицательных оценок нет. Получили оптимальное решение $X_{opt} = (11; 9; 7)$, $F(\bar{X}) = 960$, оно является целочисленным.

Ответ. Чтобы получить максимальную прибыль 960 у.е. при имеющихся ресурсах, необходимо выпустить 11 изделий вида А, 9 изделий вида Б, 7 изделий вида В.

5. Рекомендуемая литература.

Основная

1. М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. Основы математики и ее приложение в экономическом образовании: Учебник. – 4-е изд., исп. – М.: Дело, 2003.
2. М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. Математика для экономических специальностей: Учебник. – 4-е изд., исп. – М.: Дело, 2003.
3. М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. Математика для экономического бакалавриата. Учебник. – 4-е изд., исп. – М.: Дело, 2005.
4. Высшая математика для экономистов. Учебник для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; Под ред. проф. Н.Ш. Кремера, - 2-е изд., перераб. и доп. – М: ЮНИТИ, 2003.
5. Кремер Н.Ш, Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н.. Высшая математика для экономических специальностей. Учебник и Практикум (части I и II) / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера, - 2-е изд., перераб. и доп. – М: Высшее образование, 2007. – 893с. – (Основы наук)
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. М. высшая школа. 1999.

Дополнительная

1. И.И. Баврин, В.Л. Матросов. Высшая математика. «Гуманитарный издательский центр Владос», 2002.
2. И.А. Зайцев. Высшая математика. «Высшая школа», 1998.
3. А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов, И.Г. Шандра. Математика в экономике / в двух частях/. М. Финансы и статистика. 1999.

Содержание

Введение.	3
1. Общие методические рекомендации.	3
2. Программа курса.	3
3. Задания к контрольной работе.	5
4. Методические указания по выполнению контрольной работы.	9
Методические указания к задаче № 1.	9
Методические указания к задаче № 2.	12
Методические указания к задаче № 3.	15
Методические указания к задаче № 4.	16
Методические указания к задаче № 5.	17
5. Рекомендуемая литература	24

Кубекова Б.С.

СОВРЕМЕННАЯ АЛГЕБРА

Методические указания

План университета 2023 г., поз. № 25

Редактор
Компьютерная верстка

Н.В. Ефрюкова
Б.С. Кубекова

Подписано в печать

Формат 60x84/16. Бумага газетная.

Объем 2,6 физ. печ. л., 2,4 усл. печ. л., 0,8 уч. изд. л.

Тираж 100 экз.

Издательство Карачаево-Черкесского
государственного университета:
356202, Карачаевск, ул. Ленина, 29
ЛР № 040310 от 21.10. 1997.

Набрано и отпечатано в типографии
Карачаево-Черкесского государственного
университета:
356202, Карачаевск, ул. Ленина, 46